

1) Решить игры $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ с суммой

$$F(x, y) = 11x + 13y; \quad X = Y = [0, 1].$$

$$G(x, y) = (x - y)^2;$$

Γ_1 : Найти $Y(x)$: $Y(x) = \begin{cases} 1, & x < 1/2, \text{ ибо } G(x, 0) - G(x, 1) = 2x - 1, \\ 0, 1/2, & x = 1/2; \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$

$$W(x) = \begin{cases} 11x + 13, & x < 1/2; \\ 11x, & x \geq 1/2 \end{cases}$$

ибо min

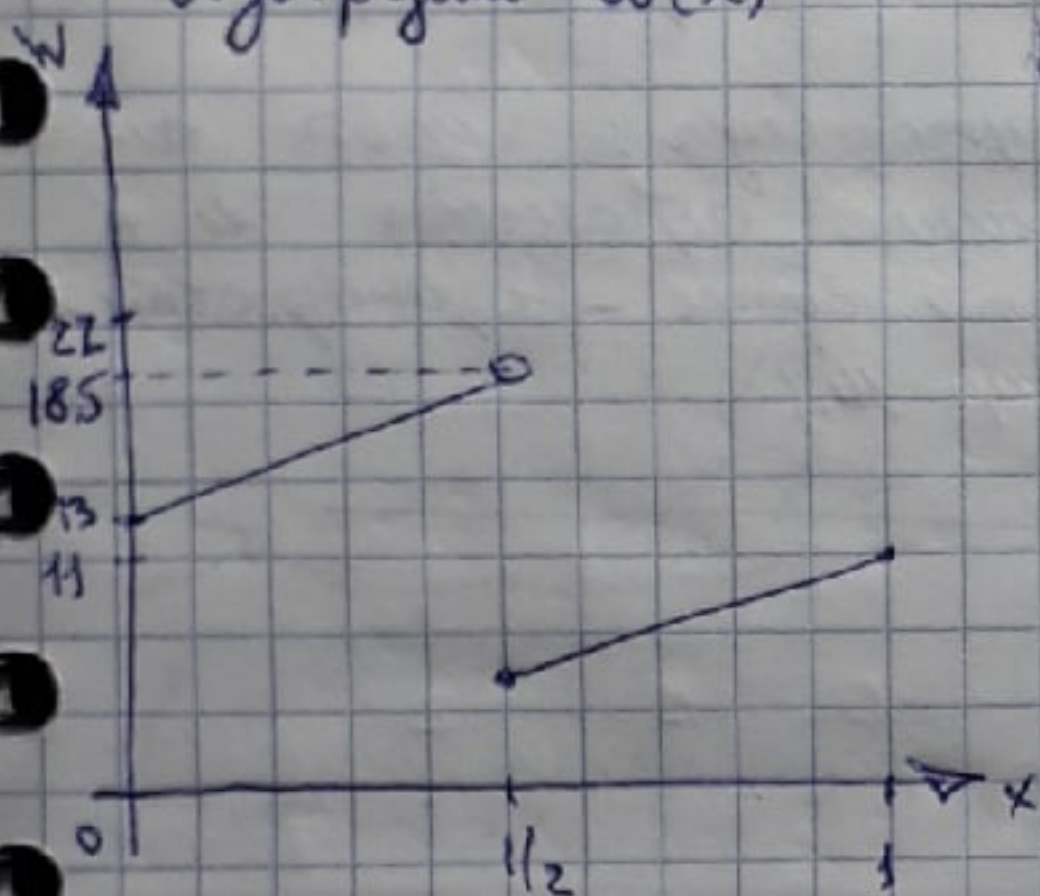
Изобразим $W(x)$:

$$F_1 = \sup_x W(x) = \frac{37}{2} = 18.5$$

$$\Delta W(x^\varepsilon) \geq \frac{37}{2} - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x^\varepsilon + 13 \geq \frac{37}{2} - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^\varepsilon = \frac{11}{2} - \frac{\varepsilon}{11}$$



$$\Gamma_2: f^H(y) = y \Rightarrow G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} (x - y)^2 = 0;$$

$$E = [0, 1]; \quad D = \{(x, y) \mid (x - y)^2 > 0\} = \{(x, y) \mid x \neq y\}$$

$$\text{где } X = Y = [0, 1].$$

$$K = \sup_{(x, y) \in D} F(x, y) = F(1, 1) = 24 = F_2.$$

$$\Delta (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1 - \alpha\varepsilon, 1); \text{ тогда } F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq 24 - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11(1 - \alpha\varepsilon) + 13 = 24 - \varepsilon;$$

$$-11\alpha\varepsilon = -\varepsilon \Rightarrow \alpha = 1/11 \Rightarrow$$

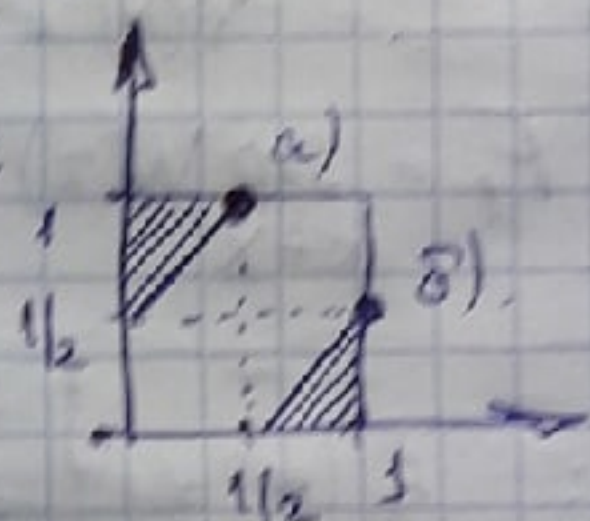
$$\Rightarrow (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{11}, 1\right); \quad f^0(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{11}, & y = 1; \\ y, & y \neq 1 \end{cases}$$

④ (продолжение)

$$\Gamma_3: G_3 = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} G(x, y) = \min_x \max \{x^2, (x-1)^2\} = 1/4$$

$$Y(x), \text{ как было посчитано ранее, } = \begin{cases} 1, & x < 1/2; \\ \{0, 1\}, & x = 1/2; \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$$

$$D: (x, y): G(x, y) > G_3 = 1/4 \Leftrightarrow |x - y| > 1/2$$



$$a): (1/2, 1) \Rightarrow F(x, y) = \frac{1 + 2 \cdot 6}{2} = \frac{37}{2}$$

$$б): (1, 1/2) \Rightarrow F(x, y) = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{2} = \frac{35}{2}$$

$$K' = \frac{37}{2} \Rightarrow F_3 = \max \left\{ \frac{37}{2}, \frac{37}{2} \right\}; \quad F_3 \geq F_1; \quad F_3 \leq F_2, \text{ выполнено.}$$

Аналогично, как и для Γ_2 , получим $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$:
 $\exists (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1/2, 1 - \alpha\varepsilon); \quad \exists F(1/2, 1 - \alpha\varepsilon) \geq \frac{37}{2} - \varepsilon$

$$\frac{1}{2} + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3\alpha\varepsilon = \frac{37}{2} - \varepsilon \Rightarrow 0 = \varepsilon(13\alpha + 1) \Rightarrow \alpha = 1/13$$

$$g_1^\varepsilon(g) = \begin{cases} 1, & g(1) = 1 - \varepsilon/13; \\ 1/2, & g(1) \neq 1 - \varepsilon/13. \end{cases}$$

Γ_1 с информацией:

	$Y(x)$	$y(x)$	z	$F(z, y)$
$x < 1/2$	$\{1\}$	1	1	24 max
$x > 1/2$	$\{0\}$	0	1	11
$x = 1/2$	$\{0, 1\}$	0	1	11

$F_B = 24$ —
 равна с лучшим из F_1, F_2 .

② Решить игру $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ с биекцией

$$\Gamma_1: A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -9 & -1 \\ -8 & 7 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -10 & -8 \\ 1 & -10 & 9 & -4 \\ 7 & -4 & -9 & -4 \\ -6 & -3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

max: 5, 9, 7, 9
min: -6, -10, -10, -8

$$Y(x): \begin{aligned} Y(1) &= \{1\}; \\ Y(2) &= \{3\}; \\ Y(3) &= \{1\}; \\ Y(4) &= \{4\}. \end{aligned}$$

$$W(x): \begin{aligned} W(1) &= -3; \\ W(2) &= 0; \\ W(3) &= 0; \\ W(4) &= 2. \end{aligned}$$

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = 2; \quad i^0 = 4.$$

$$\Gamma_2: f^H(y) = \begin{cases} 4, & y=1; \\ 2, & y=2; \\ 1, & y \in \{3, 4\}. \end{cases}$$

$$G_2 = -6 \text{ при } E = \{1\}; D = \{(1,1), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)\}.$$

$$K = \sup_{(x,y) \in D} F(x,y) = 2; \quad M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y) = 0;$$

$$F_2 = \max\{K, M\} = 2; \quad f^0(y) = \begin{cases} 3, & y \in \{1, 3\}; \\ 1, & y=2; \\ 4, & y=4. \end{cases}$$

$$\Gamma_3: G_3 = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} G(x,y) = 5;$$

$$D' = \{(2,3), (3,1), (4,4)\}; \quad K' = \sup_{(x,y) \in D'} F(x,y) = 2.$$

$$F_3 = \max\{K', F_1\} = 2; \quad f_1^0(g) = \begin{cases} 4, & g(4)=4; \\ 1, & g(4) \neq 4. \end{cases}$$

Зам., выполнено $F_1 \leq F_3 \leq F_2$

② (продолжение)

Цзрл Γ_1 с биекцией:

x	$Y(x)$	$y(x)$	z	u_x
$x=1$	$\{1\}$	1	4	-3
$x=2$	$\{3\}$	3	1	-9
$x=3$	$\{1\}$	1	4	-3
$x=4$	$\{4\}$	4	1	-1

$$\max_{x \in X} u_x = -1; \quad F_5 = -1.$$

③ Найти ситуации равновесия и паретооптимальные стратегии

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

По определению, (x^0, y^0) будет равновесием, если

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0); \quad \max_{y \in Y} G(x^0, y) = G(x^0, y^0)$$

Т.е., ситуациями равновесия будут $(2, 4)$ и $(3, 2)$.

Оптимальность по Парето: $\nexists (x, y) : F(x, y) \geq F(x_0, y_0);$
 $G(x, y) \geq G(x_0, y_0)$
 Одно из них - строгое.

Паретооптимальные ситуации: $(3, 2)$ - соотв. по ним $i=3;$
 $j=2.$

④ Найти все ситуации равновесия в чистых стратегиях

$$F(x, y) = -x^2 + 5xy + y^2; \quad G(x, y) = -(x-y)^2 - 0.15y;$$

$$X = Y = [0, 1]$$

Заметим, F и G — строго выпуклы по x и y соответственно

$$\Delta \frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 5y = 0;$$

$$x = \frac{5}{2}y \Rightarrow x(y) = \begin{cases} 5/2 y; & y \in [0, 2/5]; \\ 1, & y \in (2/5, 1] \end{cases}$$

$$\Delta \frac{\partial G}{\partial y} = 2(x-y) - 0.15 = 0; \quad y(x) = \begin{cases} x - 3/40, & x \in [3/40, 1]; \\ 0, & x \in [0, 3/40). \end{cases}$$

$$y = x - 3/40 \Rightarrow$$

Решим систему:

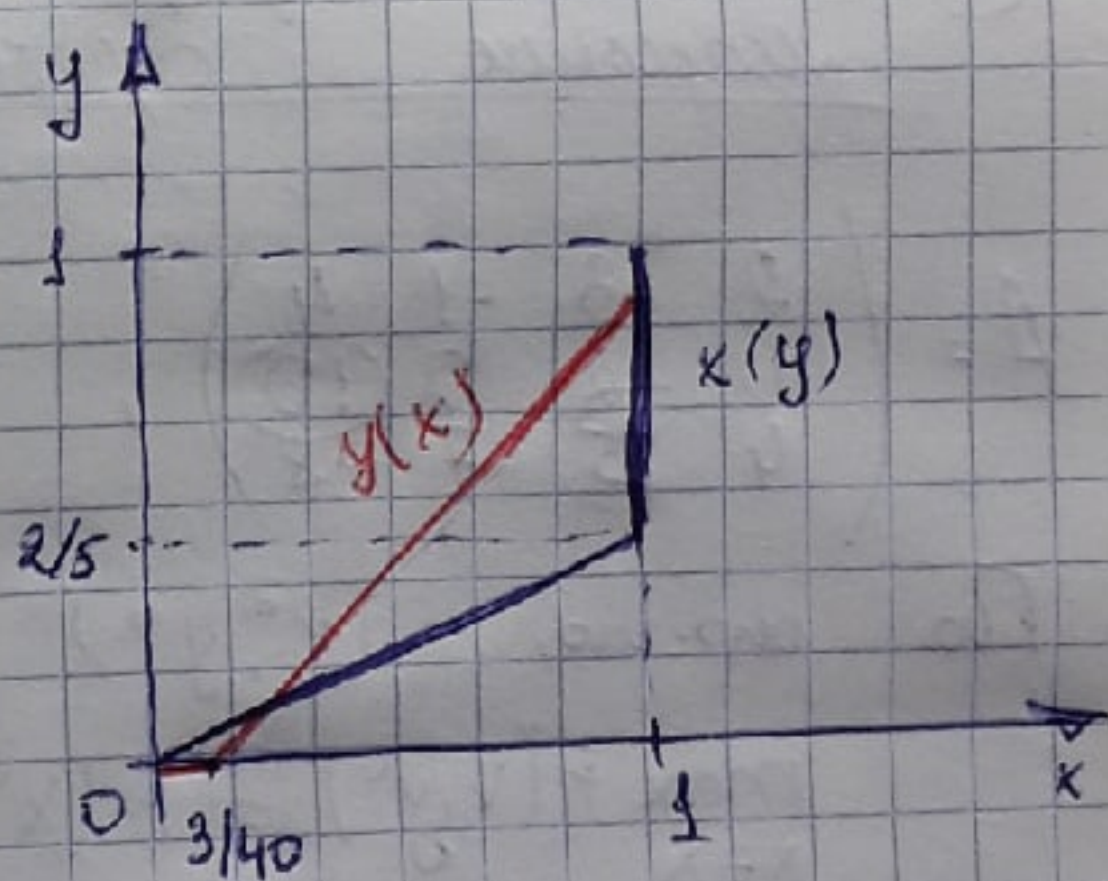
$$\begin{cases} x(y) = x; \\ y(x) = y. \end{cases}$$

По графику построенного
функций видно,
что имеется три
ситуации равновесия:

$$S_0 = (0, 0);$$

$$S_1 = (1/8, 1/20);$$

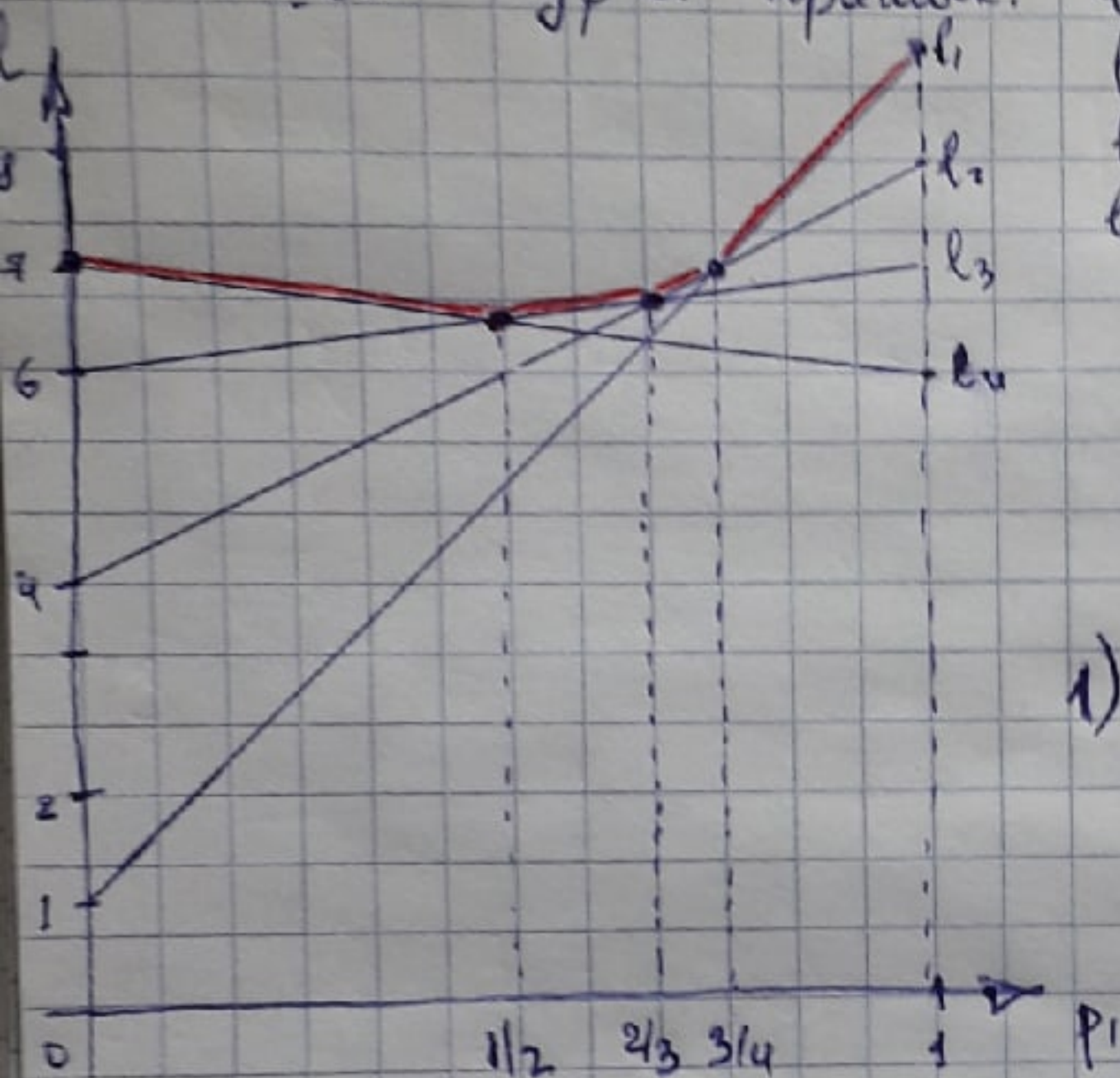
$$S_2 = (1, 37/40).$$



5) Найти все ситуации равновесия в смешанных стратегиях для биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Выпишем ур-я прямых: $l_1(p_1) = 9p_1 + (1-p_1) = 8p_1 + 1$
 $l_2(p_1) = 8p_1 + 4(1-p_1) = 4p_1 + 4$
 $l_3(p_1) = 7p_1 + 6(1-p_1) = -p_1 + 6$
 $l_4(p_1) = 6p_1 + 7(1-p_1) = -p_1 + 7$



Построим верхнюю огибающую и рассмотрим потенциальное равновесие ситуации.

1). $p_1^0 = 1/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5q^* + 2(1-q^*) = v_1; \\ 9q^* + 1 - q^* = v_1. \end{cases}$$

$$3q^* + 2 = 8q^* + 1;$$

$$q^* = 1/5;$$

$$v_1 = 13/5;$$

$$S_0 = ((1/2, 1/2); (0, 0, 1/5, 4/5)).$$

2). $p_1^0 = 2/3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3q^* + 5(1-q^*) = v_1; \\ 3q^* + 9(1-q^*) = v_1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$-2q^* + 5 = -6q^* + 9;$$

$$4q^* = 4; \quad q^* = 1, \quad v = 3.$$

$$S_1 = ((2/3, 1/3); (0, 1, 0, 0)).$$

3). $p_1^0 = 3/4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^* + 3(1-q^*) = v_1; \\ 4q^* + 3(1-q^*) = v_1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$3 - 2q^* = q^* + 3;$$

$$q^* = 0; \quad v = 3.$$

$$S_2 = ((3/4, 1/4); (1, 0, 0, 0)).$$

Вырожденных случаев ($p_1^0 = 1 \vee p_2^0 = 1$) не найдено.